Énoncés pages suivantes

Documents, calculatrices, téléphones et autres appareils électroniques interdits.

Durée de l'épreuve : 1h30

Le sujet est un QCM. A chaque question, il n'y a qu'une seule bonne réponse possible.

Une réponse correcte à une question rapporte 2 points et une réponse incorrecte coute 0.5 points.

Répondre sur feuille séparée ou sur l'énoncé (mettre une croix devant la bonne réponse).

1. Le triangle fermé de $\mathbb{R}^2$ de sommets les points $A(0,0)$, $B(0,1)$ et $C(1,1)$ est l'ensemble
   (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y - x \leq 1\}$
   (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x + y \leq 1\}$
   (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$
   (d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$
   (e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

2. L'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ est
   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$
   (b) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$
   (c) $\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
   (d) L'inverse n'existe pas
   (e) Il y a une infinité d'inverses.

3. La dérivée de la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{2x}}{x\, e^{x^2}}$ en $x = 1$ vaut
   (a) $-\dfrac{5}{e}$
   (b) $-e$
   (c) $-\dfrac{1}{e}$
   (d) $\dfrac{1}{e}$
   (e) 1

4. Soit M be une matrice 3×3. On suppose que
$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
   Alors $M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   (a) est égal à $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
   (b) est égal à $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
   (c) est égal à $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
   (d) est égal à $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   (e) ne peut pas être déterminé avec l'information disponible

5. On a une paire de chaussettes blanches, deux paires de chaussettes rouges et cinq paires de chaussettes noires, posées en désordre dans un panier. On prend deux chaussettes à l'aveuglette. La probabilité de tirer les deux chaussettes blanches vaut
   (a) $\frac{1}{56}$
   (b) $\frac{1}{120}$
   (c) $\frac{1}{80}$
   (d) $\frac{1}{28}$
   (e) $\frac{1}{240}$

6. La valeur de la limite
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{e^x - 1 - x}$$
   est
   (a) 1
   (b) -1
   (c) 0
   (d) -2
   (e) $-\infty$

7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que son graphe est la droite passant par les points de coordonnées $(-2\,,\,-2)$ et $(0\,,\,2)$. L'intégrale $\int_0^{-1} f(t)dt$ est égale à
   (a) -2
   (b) -1
   (c) 0
   (d) 1
   (e) 2

8. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+2}{(x-1)^2}\, dx$ est égale à
   (a) $1 - \ln 2$
   (b) $3 - \ln 2$
   (c) $1 + \ln 2$
   (d) $2 + \ln 2$
   (e) $4 + \ln 2$

9. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ alors $A^{2012} =$

(a) $\begin{pmatrix} 3^{2012} & (-5)^{2012} \\ 2^{2012} & (-3)^{2012} \end{pmatrix}$
(b) A
(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
(d) $-A$
(e) $-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. Quelle est la *valeur* maximum de $x - x^3$ sur l'intervalle $-2 \leq x \leq 2$?

(a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
(b) $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$
(c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
(d) $3\sqrt{3}$
(e) 6

11. Soient m et n deux réels tels que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} n + e^{2x} & \text{quand } x \geq 0 \\ 4 + mx & \text{quand } x < 0, \end{cases}$$

est continue et dérivable. Alors $f(n-m)$ est égal à

(a) $3 + e^2$
(b) $2 + e$
(c) e^2
(d) $2e$
(e) 2

12. Soit $f(x) = \frac{4}{x-1}$ et $g(x) = \frac{2x+1}{x}$. L'ensemble des solutions de l'équation $f(g(x)) = g(f(x))$ est

(a) $\{4\}$
(b) $\{-2, 3\}$
(c) $\{7\}$
(d) $\{1, 7\}$
(e) $\{7, 9\}$

13. Soit z le nombre complexe $1 + i$. Une des racines carrées de z est égal à

(a) 1
(b) $2i$
(c) i
(d) $2^{1/8} e^{i\pi/8}$
(e) $-2^{1/4} e^{i\pi/8}$

14. Dans $\mathbb{C}$, l'équation $2z^2 + 2z + 1 = 0$

(a) a pour solution $-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$
(b) n'a pas de solution
(c) a pour solution $-\frac{1}{4} + i\frac{1}{4}$ et $-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$
(d) a pour solution $-\frac{1}{2} + i\frac{1}{4}$ et $-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$
(e) a pour solution $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

15. On considère $e_1 = (1, 2, 3)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 1, 1)$, $e_4 = (1, 0, 0)$. Soient alors $E = \mathrm{vect}(e_1, e_2, e_3)$ et $F = \mathrm{vect}(e_4)$. Alors

(a) la dimension de $E + F$ est 2
(b) e_1, e_2, e_3, e_4 est une base de $\mathbb{R}^3$
(c) $E \cup F = E + F$
(d) la dimension de $E + F$ est 4
(e) $E \cap F = E$

16. On rappelle la formule $P(A|B) = P(A, B)/P(B)$, pour tout A et B tels que $P(B) > 0$. Soient A et B deux evenements tels que $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.6$ et $P(B|A^c) = 0.4$. La quantité $P(A^c|B^c)$ est égale à

(a) 1
(b) 0.9
(c) 0.2
(d) $P(A^c \cap B^c)$
(e) $P(A^c)$

17. Soit f une fonction intégrable. La suite $u_n = \int_0^1 (1 - t^n) f(t)\, dt$ définie pour tout $n \geq 1$, a pour limite, quand $n \to \infty$,

(a) $\int_0^1 f(t)\, dt$
(b) $\int_0^1 (1 - f(t))\, dt$
(c) 0
(d) $+\infty$

18. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ ($P(X = 1) = p = 1 - P(X = 0)$). Alors $P(X \neq Y)$ est égal à

(a) 0
(b) $1 - p$
(c) $p(1 - p)$
(d) $2p(1 - p)$
(e) p